

HJ

中华人民共和国国家生态环境标准

HJ 1264—2022

卫星遥感细颗粒物（PM_{2.5}）监测 技术指南

Technical guideline for fine particulate matter (PM_{2.5}) monitoring
based on satellite remote sensing

本电子版为正式标准文本，由生态环境部环境标准研究所审校排版。

2022-07-14 发布

2023-01-15 实施

生态环境部 发布

目 次

前 言	ii
1 适用范围	1
2 规范性文件	1
3 术语和定义	1
4 总则	2
5 监测方法	4
6 结果验证	5
7 质量控制	6
附录 A（资料性附录） PM _{2.5} 浓度地理加权回归计算方法	7



前 言

为贯彻《中华人民共和国环境保护法》《中华人民共和国大气污染防治法》，防治生态环境污染，改善生态环境质量，规范和指导卫星遥感细颗粒物监测工作，制定本标准。

本标准规定了卫星遥感细颗粒物监测的方法、结果验证、质量控制等内容。

本标准的附录 A 为资料性附录。

本标准首次发布。

本标准由生态环境部生态环境监测司、法规与标准司组织制订。

本标准主要起草单位：生态环境部卫星环境应用中心、江苏省扬州环境监测中心。

本标准生态环境部 2022 年 7 月 14 日批准。

本标准自 2023 年 1 月 15 日起实施。

本标准由生态环境部解释。



卫星遥感细颗粒物（PM_{2.5}）监测技术指南

1 适用范围

本标准规定了卫星遥感细颗粒物监测的方法、结果验证、质量控制等内容。

本标准适用于陆地区域卫星遥感细颗粒物监测工作，作为地面监测手段的补充，用于掌握大范围细颗粒物空间分布规律及变化趋势。

2 规范性引用文件

本标准引用了下列文件或其中的条款。凡是注明日期的引用文件，仅注日期的版本适用于本标准。凡是未注日期的引用文件，其最新版本（包括所有的修改单）适用于本标准。

HJ 93	环境空气颗粒物（PM ₁₀ 和PM _{2.5} ）采样器技术要求及检测方法
HJ 653	环境空气颗粒物（PM ₁₀ 和PM _{2.5} ）连续自动监测系统技术要求及检测方法
HJ 655	环境空气颗粒物（PM ₁₀ 和PM _{2.5} ）连续自动监测系统安装和验收技术规范
HJ 817	环境空气颗粒物（PM ₁₀ 和PM _{2.5} ）连续自动监测系统运行和质控技术规范

3 术语和定义

下列术语和定义适用于本标准。

3.1

气溶胶光学厚度 aerosol optical depth (AOD)

从地面到大气层顶垂直路径中整层气溶胶消光系数的总和，量纲为1。

3.2

像元PM_{2.5}浓度 pixel PM_{2.5} concentration

卫星观测1个像元范围内的近地面大气细颗粒物平均质量浓度，计量单位为μg/m³。

3.3

行星边界层高度 planetary boundary layer height (PBLH)

行星边界层也称摩擦层或大气边界层，是对流层的最下层，一般自地面到1 km~2 km高度；行星边界层高度是指从地面到行星边界层顶的高度，表示污染物在垂直方向能被热力湍流所扩散的范围。

3.4

地理加权回归 geographically weighted regression (GWR)

一种用回归原理研究具有空间（或区域）分布特征的两个或多个变量之间数量关系的方法，在数据处理时考虑局部特征作为权重。

4 总则

4.1 监测原理

根据 PM_{2.5} 质量浓度与 AOD、吸湿增长因子、密度、半径、消光效率因子及行星边界层高度等因素的转化关系计算 PM_{2.5} 质量浓度。PM_{2.5} 质量浓度按公式 (1) 计算：

$$M(PM_{2.5}) = \frac{4}{3} \times \frac{\bar{\rho} \times \bar{r}}{\bar{Q}} \times \frac{AOD}{PBLH \times f(RH)} \quad (1)$$

式中： $M(PM_{2.5})$ ——PM_{2.5} 质量浓度， $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ；
 $4/3$ ——球形粒子体积计算常数，量纲为 1；
 $\bar{\rho}$ ——PM_{2.5} 平均密度， $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ；
 \bar{r} ——PM_{2.5} 粒子有效半径，m；
 \bar{Q} ——PM_{2.5} 粒子平均消光效率因子，量纲为 1；
 AOD ——气溶胶光学厚度，量纲为 1；
 $PBLH$ ——行星边界层高度，m；
 RH ——环境空气相对湿度，%；
 $f(RH)$ ——气溶胶消光吸湿增长因子，量纲为 1。

气溶胶消光吸湿增长因子按公式 (2) 计算：

$$f(RH) = (1 - RH/100)^{-g} \quad (2)$$

式中： $f(RH)$ ——气溶胶消光吸湿增长因子，量纲为 1；
 1 ——常数，量纲为 1；
 RH ——环境空气相对湿度，%；
 100 ——同温度和气压下的饱和绝对湿度，量纲为 1；
 g ——经验拟合系数，与气溶胶成分有关，一般可以取为 1。

将公式 (1) 取自然对数变换为 PM_{2.5} 质量浓度的多元线性回归关系式，见公式 (3)：

$$\ln(M(PM_{2.5})) = \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 \ln(AOD) + \bar{\beta}_2 \ln(PBLH) + \bar{\beta}_3 \ln(1 - RH/100) \quad (3)$$

式中： \ln ——自然对数运算；
 $\bar{\beta}_0$ 、 $\bar{\beta}_1$ 、 $\bar{\beta}_2$ 、 $\bar{\beta}_3$ ——方程回归系数；
 $M(PM_{2.5})$ ——PM_{2.5} 质量浓度， $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ；
 AOD ——气溶胶光学厚度，量纲为 1；
 $PBLH$ ——行星边界层高度，m；
 RH ——环境空气相对湿度，%；
 100 ——同温度和气压下的饱和绝对湿度，量纲为 1。

公式 (3) 中参数 $\bar{\beta}_0$ 、 $\bar{\beta}_1$ 、 $\bar{\beta}_2$ 、 $\bar{\beta}_3$ 代表研究区域内的平均值，考虑到回归系数随空间位置的变化特征，将公式 (3) 进一步扩展为卫星遥感监测 PM_{2.5} 质量浓度的随空间回归模型，见公式 (4)：

$$\ln(M(PM_{2.5}(u_i, v_i))) = \beta_0(u_i, v_i) + \beta_1(u_i, v_i) \ln(AOD) + \beta_2(u_i, v_i) \ln(PBLH) + \beta_3(u_i, v_i) \ln(1 - RH/100) \quad (4)$$

式中： \ln ——自然对数运算；
 $M(PM_{2.5})$ ——PM_{2.5} 质量浓度， $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ；
 u_i ——第*i*个 ($i=1, 2, \dots, n$) 训练样本的地理横坐标，量纲为 1；

v_i ——第 i 个 ($i=1,2,\dots,n$) 训练样本的地理纵坐标, 量纲为 1;

β_0 、 β_1 、 β_2 、 β_3 ——随不同空间位置变化的方程回归系数;

AOD ——气溶胶光学厚度, 量纲为 1;

$PBLH$ ——行星边界层高度, m;

RH ——环境空气相对湿度, %;

100——同温度和气压下的饱和绝对湿度, 量纲为 1。

根据公式 (4), 采用地理加权回归方法结合 $PM_{2.5}$ 质量浓度地面监测样本数据, 即可计算像元 $PM_{2.5}$ 浓度。

4.2 输入数据选择

本标准所用输入数据包括多光谱卫星遥感数据、气象参数及地面监测数据。其中, 多光谱卫星遥感数据的波段应包括 $0.47 \mu m$ 附近和 $0.66 \mu m$ 附近的可见光波段、 $0.86 \mu m$ 附近的近红外波段、 $2.1 \mu m$ 附近的短波红外波段和 $12 \mu m$ 附近的远红外波段; 气象参数包括行星边界层高度、环境空气相对湿度两个数据; 地面监测数据包括监测点位的 $PM_{2.5}$ 质量浓度小时均值及相应的地理坐标。

4.3 监测内容

陆地区域 $PM_{2.5}$ 质量浓度及分布。

4.4 监测流程

根据卫星遥感数据源的特点, 综合利用暗目标算法、深蓝算法等反演方法, 从卫星遥感光谱数据中获取区域 AOD 结果; 同时, 从气象模式资料中提取出气溶胶垂直订正和湿度订正所需要的行星边界层高度和相对湿度数据, 结合地面监测资料, 采用地理加权回归方法逐像元计算 $PM_{2.5}$ 质量浓度, 获取陆地区域 $PM_{2.5}$ 质量浓度分布结果。

陆地区域 $PM_{2.5}$ 质量浓度卫星遥感监测的一般流程如图 1 所示:

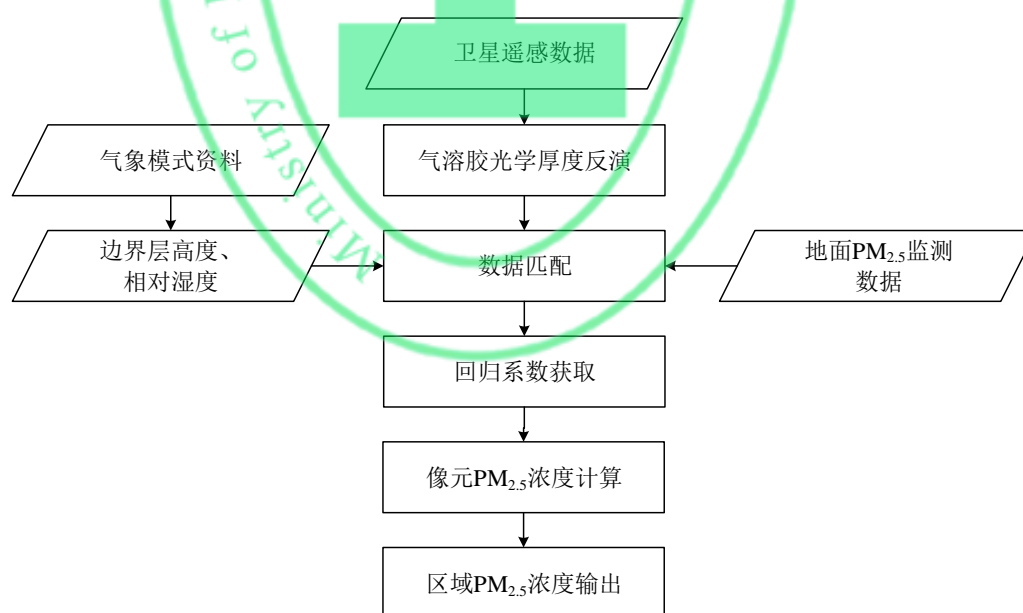


图 1 陆地区域 $PM_{2.5}$ 质量浓度卫星遥感监测流程图

5 监测方法

5.1 AOD 遥感反演

利用卫星遥感数据，采用暗目标法和深蓝算法反演获取目标区域无云陆地像元的 AOD，卫星遥感反演流程如下：

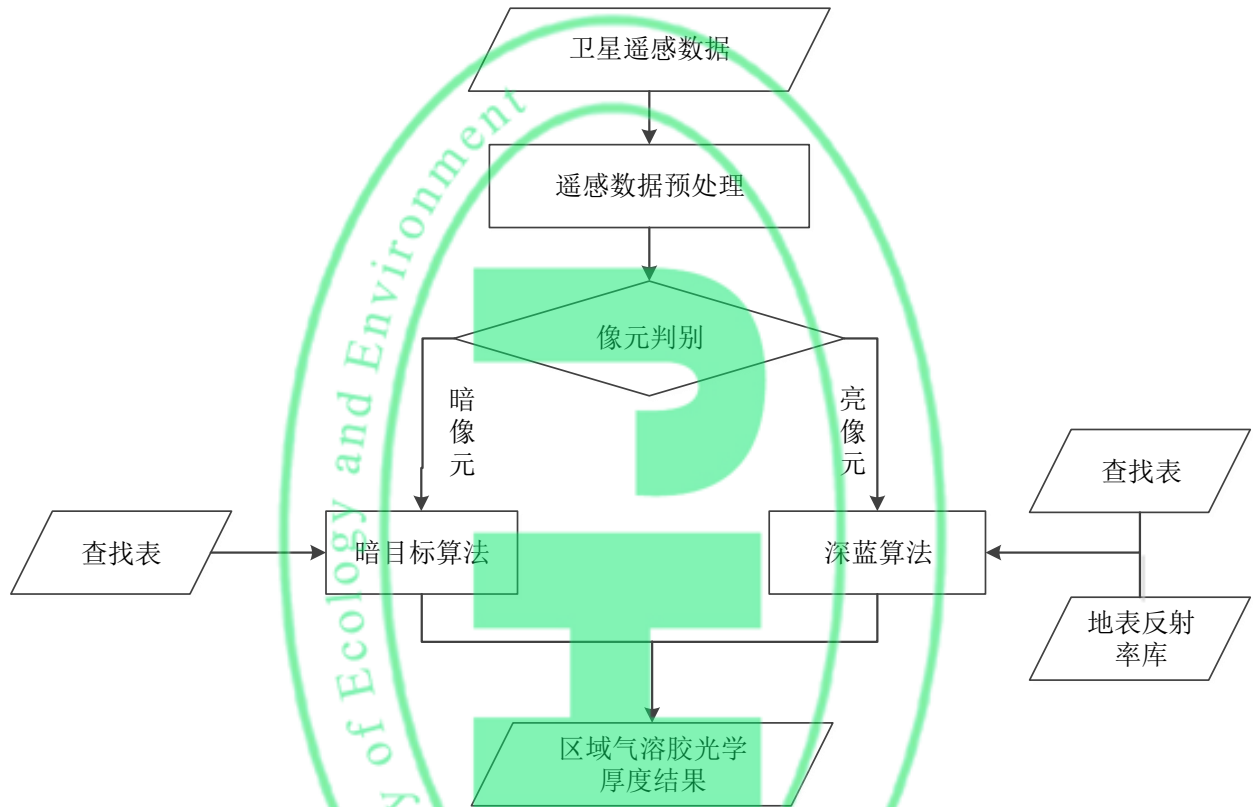


图 2 卫星遥感反演 AOD 流程图

开展 AOD 遥感反演，主要包括以下七个步骤：

- a) 查找表。利用辐射传输模型结合卫星传感器可见光和近红外波段的光谱响应函数构建查找表；
- b) 地表反射率库。利用历史地表反射率数据（如 MOD09）合成先验地表反射率库，用于亮像元 AOD 遥感反演；
- c) 遥感数据预处理。对卫星遥感数据进行质量检查、辐射定标及几何校正，然后计算可见光、近红外和短波红外波段的表观反射率及远红外波段的亮度温度，并进行云、水体像元识别去除，提取目标区域无云陆地像元；
- d) 像元判别。根据卫星探测的短波红外波段（2.1 μm 附近）表观反射率，将无云陆地像元分为暗像元和亮像元两类；
- e) 暗像元 AOD 计算。针对暗像元，采用暗目标算法结合查找表进行 AOD 反演计算；
- f) 亮像元 AOD 计算。针对亮像元，采用深蓝算法结合地表反射率库及查找表进行 AOD 反演计算；
- g) 区域 AOD 输出。将暗像元 AOD 和亮像元 AOD 合并输出为全区域 AOD 结果。

PM_{2.5} 卫星遥感监测工作中，如无条件开展 AOD 遥感反演工作，也可采用官方发布的 MOD04、

MCD19A2 等 AOD 数据产品作为卫星遥感细颗粒物计算模型的输入参数。

5.2 气象资料提取

从气象模式（如全球气象预报模式（Global Forecast System, GFS）和中尺度天气预报模式（Weather Research and Forecasting, WRF）等资料中提取出区域行星边界层高度和相对湿度数据，并按 AOD 的空间分辨率采用双线性插值方法进行重采样。

5.3 数据匹配

利用地面监测站点的 $PM_{2.5}$ 质量浓度数据与区域 AOD、气象资料进行时间和空间上的卫星—模式—地面多源数据匹配，形成输入数据集。

- 以 $PM_{2.5}$ 质量浓度地面监测站点所在地理坐标为中心，根据卫星监测时间，考虑大气气溶胶移动速度（一般微风情况下，气溶胶移动速度约为 $3\text{ m/s}\sim 5\text{ m/s}$ ）和卫星遥感像元邻近效应，选取中心位置周边 15 km 范围和监测时间前后各半小时区间内的 AOD、行星边界层高度和相对湿度有效结果，并计算平均值。
- 根据附录 A 中公式（A.3）构建 $PM_{2.5}$ 质量浓度、AOD、行星边界层高度和相对湿度输入数据集。

5.4 回归系数获取

根据监测原理形成 $PM_{2.5}$ 质量浓度矩阵计算公式，见公式（5）：

$$Y = X\beta \quad (5)$$

式中： Y ——因变量矩阵，构建形式见附录 A；
 X ——自变量矩阵，构建形式见附录 A；
 β ——回归系数矩阵，构建形式见附录 A。

回归系数矩阵 β 根据地理加权方法（原理见附录 A）求解。设定高斯函数作为权重计算方法，采用交叉验证方法获取最优带宽，并计算获取回归系数矩阵 β 。

陆地区域 $PM_{2.5}$ 质量浓度回归系数采用普通克里金插值方法（采用插值处理软件默认参数，半变异函数为球状模型，搜索半径为邻近 12 个样本点）获取。根据回归系数矩阵 β 的每一列按照对应的地理坐标信息依据 AOD 的空间分辨率进行空间插值，即可得到区域连续的回归系数。

5.5 陆地区域 $PM_{2.5}$ 质量浓度计算

根据目标区域中每个像元对应的 AOD、行星边界层高度、相对湿度以及回归系数，结合公式（5）逐像元计算 Y 值，并计算像元 $PM_{2.5}$ 浓度，见公式（6）：

$$M(PM_{2.5}) = \exp(Y) \quad (6)$$

式中： $M(PM_{2.5})$ —— $PM_{2.5}$ 质量浓度， $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ；
 \exp ——以 e 为底的指数函数；
 Y ——像元回归因变量。

将所有计算像元 $PM_{2.5}$ 浓度按照卫星遥感数据的投影方式和地理坐标系统存储，形成陆地区域 $PM_{2.5}$ 质量浓度结果。

6 结果验证

采取十折交叉验证方法验证卫星遥感获取的陆地区域 $PM_{2.5}$ 质量浓度监测结果。根据 5.3 形成的输

入数据集，将其按等比例随机分成 10 个数据子集，分 10 次轮流选取其中 1 个数据子集作为测试比对数据，其他 9 个子集作为 $\text{PM}_{2.5}$ 质量浓度反演训练样本数据，依据本标准的 $\text{PM}_{2.5}$ 质量浓度反演模型采用训练样本数据计算回归系数，然后根据该回归系数采用测试比对数据计算像元 $\text{PM}_{2.5}$ 浓度遥感计算结果，将遥感结果和地面监测值进行线性相关分析，并计算决定系数 (R^2) 和相对精度 (RA)，用于评估 $\text{PM}_{2.5}$ 质量浓度预测结果在实际应用中的准确性。

在利用卫星遥感细颗粒物进行监测分析应用时，结果验证应满足决定系数 (R^2) 大于 0.7 且相对精度 (RA) 高于 70%。决定系数 (R^2) 和相对精度 (RA) 计算方式分别见公式 (7) 和公式 (8)：

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (7)$$

式中： R^2 ——决定系数，量纲为 1；

\hat{y}_i ——像元 $\text{PM}_{2.5}$ 浓度遥感计算结果， $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ；

\bar{y} ——区域内所有地面监测 $\text{PM}_{2.5}$ 质量浓度的平均值， $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ；

y_i ——第 i 个 ($i=1,2,\dots,n$) 地面站点 $\text{PM}_{2.5}$ 质量浓度监测值， $\mu\text{g}/\text{m}^3$ 。

$$\text{RA} = \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|}{\sum_{i=1}^n |y_i|}\right) \times 100\% \quad (8)$$

式中：RA——相对精度，%；

\hat{y}_i ——像元 $\text{PM}_{2.5}$ 浓度遥感计算结果， $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ；

\bar{y} ——区域内所有地面监测 $\text{PM}_{2.5}$ 质量浓度的平均值， $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ；

y_i ——第 i 个 ($i=1,2,\dots,n$) 地面站点 $\text{PM}_{2.5}$ 质量浓度监测值， $\mu\text{g}/\text{m}^3$ 。

7 质量控制

7.1 卫星数据质量

在进行遥感数据预处理前，要保证卫星遥感原始数据的质量，避免有噪声条带的数据参与后续处理，导致结果产生误差。同时，要保证相应的几何定位数据质量，在利用不同卫星及传感器的遥感数据前，确保地理位置的几何配准精度在一个像元之内。

7.2 输入参数精度

为提高 $\text{PM}_{2.5}$ 质量浓度遥感监测结果的准确性，一方面要采用较为成熟的气象预报模式模拟数据（如 GFS、WRF 等），保证行星边界层高度和相对湿度的相对精度均达 80% 以上；另一方面保证输入的地面 $\text{PM}_{2.5}$ 质量浓度监测数据可靠，监测数据来自国家或省级生态环境监测部门正式公布结果，监测采样仪器、自动监测系统、安装验收和运行质控等技术要求分别符合 HJ 93、HJ 653、HJ 655 和 HJ 817 的规定，同时保证监测点位足够且分布相对较均匀，一般 $1 \times 10^4 \text{ km}^2$ 内至少有 3 个地面监测点位的 $\text{PM}_{2.5}$ 质量浓度监测资料，部分 $\text{PM}_{2.5}$ 质量浓度分布空间差异较大且地面环境空气质量监测网络较发达的地区，可适当提高至 $1 \times 10^4 \text{ km}^2$ 内有 5 个地面监测点位的 $\text{PM}_{2.5}$ 质量浓度监测资料。

附录 A

(资料性附录)

PM_{2.5} 质量浓度地理加权回归计算方法

公式 (5) 中因变量矩阵 Y 、自变量矩阵 X 和回归系数矩阵 β 根据匹配后的数据构建, 其中因变量矩阵 Y 构建形式见公式 (A.1):

$$Y = \begin{bmatrix} \ln(M(PM_{2.5}(u_1, v_1))) \\ \ln(M(PM_{2.5}(u_2, v_2))) \\ \vdots \\ \ln(M(PM_{2.5}(u_n, v_n))) \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

式中: Y ——因变量矩阵;

$M(PM_{2.5}(u_i, v_i))$ ——第 i 个 ($i=1, 2, \dots, n$) 训练样本的 PM_{2.5} 质量浓度, $\mu\text{g}/\text{m}^3$;

n ——训练样本数量;

u_i ——第 i 个 ($i=1, 2, \dots, n$) 训练样本的地理横坐标;

v_i ——第 i 个 ($i=1, 2, \dots, n$) 训练样本的地理纵坐标。

自变量矩阵 X 构建形式见公式 (A.2):

$$X = \begin{bmatrix} \ln(AOD(u_1, v_1)) \ln(PBLH(u_1, v_1)) \ln(1-RH(u_1, v_1)/100) \\ \ln(AOD(u_2, v_2)) \ln(PBLH(u_2, v_2)) \ln(1-RH(u_2, v_2)/100) \\ \vdots \\ \ln(AOD(u_n, v_n)) \ln(PBLH(u_n, v_n)) \ln(1-RH(u_n, v_n)/100) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

式中: X ——自变量矩阵;

$AOD(u_i, v_i)$ ——第 i 个 ($i=1, 2, \dots, n$) 训练样本的 AOD, 量纲为 1;

$PBLH(u_i, v_i)$ ——第 i 个 ($i=1, 2, \dots, n$) 训练样本的行星边界层高度, m;

$RH(u_i, v_i)$ ——第 i 个 ($i=1, 2, \dots, n$) 训练样本的相对湿度, 量纲为 1;

100——同温度和气压下的饱和绝对湿度, 量纲为 1;

n ——训练样本数量;

u_i ——第 i 个 ($i=1, 2, \dots, n$) 训练样本的地理横坐标;

v_i ——第 i 个 ($i=1, 2, \dots, n$) 训练样本的地理纵坐标。

回归系数矩阵 β 构建方式见公式 (A.3):

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0(u_1, v_1) \beta_0(u_2, v_2) \dots \beta_0(u_n, v_n) \\ \beta_1(u_1, v_1) \beta_1(u_2, v_2) \dots \beta_1(u_n, v_n) \\ \beta_2(u_1, v_1) \beta_2(u_2, v_2) \dots \beta_2(u_n, v_n) \\ \beta_3(u_1, v_1) \beta_3(u_3, v_3) \dots \beta_3(u_n, v_n) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

式中: β ——回归系数矩阵;

$\beta_0(u_i, v_i)$ 、 $\beta_1(u_i, v_i)$ 、 $\beta_2(u_i, v_i)$ 、 $\beta_3(u_i, v_i)$ ——第 i 个训练样本的回归系数;

n ——训练样本数量;

u_i ——第 i 个 ($i=1, 2, \dots, n$) 训练样本的地理横坐标;

v_i ——第 i 个 ($i=1, 2, \dots, n$) 训练样本的地理纵坐标。

回归系数矩阵 β 一般通过地理加权方法获取。先计算两个样本之间的距离, 见公式 (A.4):

$$d_{ij} = \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2} \quad (\text{A.4})$$

式中： d_{ij} ——第*i*个训练样本坐标和第*j*个训练样本坐标的距离；

u_i ——第*i*个 ($i=1,2,\dots,n$) 训练样本的地理横坐标；

v_i ——第*i*个 ($i=1,2,\dots,n$) 训练样本的地理纵坐标；

u_j ——第*j*个 ($j=1,2,\dots,n$) 训练样本的地理横坐标；

v_j ——第*j*个 ($j=1,2,\dots,n$) 训练样本的地理纵坐标。

然后设定带宽(\hat{b})计算权重函数，见公式 (A.5)：

$$W_{ij} = \exp\left(-\left[\frac{d_{ij}}{\hat{b}}\right]^2\right) \quad (\text{A.5})$$

式中： W_{ij} ——第*j*个 ($j=1,2,\dots,n$) 训练样本对第*i*个 ($i=1,2,\dots,n$) 训练样本的影响权重系数；

\hat{b} ——设定带宽；

d_{ij} ——第*i*个训练样本坐标和第*j*个训练样本坐标的距离。

再计算权重函数对角矩阵，见公式 (A.6)：

$$W(u_i, v_i) = \begin{bmatrix} W_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{i2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_{in} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

式中： $W(u_i, v_i)$ ——第*i*个 ($i=1,2,\dots,n$) 训练样本的权重函数矩阵；

n ——训练样本数量；

u_i ——第*i*个 ($i=1,2,\dots,n$) 训练样本的地理横坐标；

v_i ——第*i*个 ($i=1,2,\dots,n$) 训练样本的地理纵坐标；

W_{ij} ——第*j*个 ($j=1,2,\dots,n$) 训练样本对第*i*个 ($i=1,2,\dots,n$) 训练样本的影响权重系数。

获取回归系数，计算方法见公式 (A.7)：

$$\beta(u_i, v_i) = [X^T W(u_i, v_i) X]^{-1} X^T W(u_i, v_i) Y \quad (\text{A.7})$$

式中： n ——训练样本数量；

$\beta(u_i, v_i)$ ——第*i*个 ($i=1,2,\dots,n$) 训练样本的回归系数；

u_i ——第*i*个 ($i=1,2,\dots,n$) 训练样本的地理横坐标；

v_i ——第*i*个 ($i=1,2,\dots,n$) 训练样本的地理纵坐标；

X ——自变量矩阵；

Y ——因变量矩阵；

$W(u_i, v_i)$ ——第*i*个 ($i=1,2,\dots,n$) 训练样本的权重函数矩阵。

获取回归系数后即可根据公式 (A.3) 构建回归系数矩阵 β ，根据公式 (5) 计算获取因变量。求解最优回归结果需要在获取最优带宽的前提下获取最优回归系数矩阵，一般采用交叉验证 (cross-validation, CV) 的方法获取最优带宽值。即先根据监测点之间的距离范围，以像元大小为步长设定等间隔带宽值系列，依次以第*i*个训练样本点作为回归点，根据回归点周围站点的数据组按照公式 (5) 和公式 (A.1) ~ 公式 (A.7) 进行地理加权回归计算，计算所有回归点的因变量实际值与回归值之间差值的平方和作为回归残差平方和 $CV(\hat{b})$ ，其计算公式见 (A.8)：

$$CV(\hat{b}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}_i(\hat{b})]^2 \quad (\text{A.8})$$

式中： $CV(\hat{b})$ ——回归残差平方和；

\hat{b} ——设定带宽；

$y_{\neq i}(\hat{b})$ ——不包括回归点本身的回归值；

y_i ——第*i*个训练样本的因变量值。

根据公式(5)和公式(A.1)~公式(A.7)计算不同带宽 \hat{b} 相应的 $CV(\hat{b})$ 值,并找到最小的 $CV(\hat{b})$ 值所对应的带宽,此即最优带宽。将最优带宽代入公式(5)和公式(A.1)~公式(A.7)计算最优因变量值。

